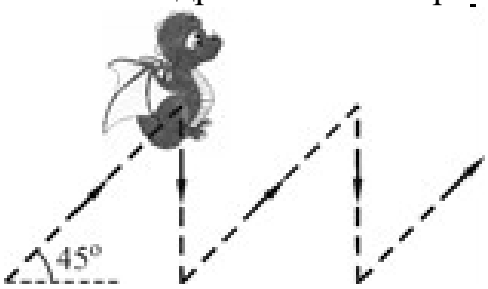
8 класс

1. Маленький дракончик летит к своей родовой скале. Дракончик маленький и быстро устает, поэтому, сначала он активно машет крыльями и летит под углом 45° к горизонтали, а потом отдыхает, опускаясь вертикально вниз. Траектория полета дракончика показана на рисунке.

Чему равна средняя горизонтальная скорость дракончика за большое время полета, если он активно летит то же время, что и отдыхает? Средняя скорость полета дракончика во время отдыха равна 10 м/с.



Решение.

Когда дракончик машет крыльями, он летит под углом 45° к горизонтали, а значит, его горизонтальна скорость равна вертикальной.

Из траектории полета дракончика видно, что его средняя высота не меняется, то есть за время активного полета он поднимается на ту же высоту, на которую опускается, отдыхая. Учитывая, что время активного полета и отдыха равны, получаем, что средняя вертикальная скорость дракончика во время активного полета равна средней скорости v_0 во время отдыха.

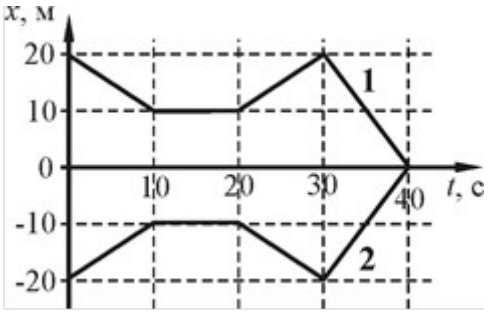
А это значит, что и средняя горизонтальная скорость дракончика во время полета равна средней скорости дракончика во время отдыха. Отсюда, учитывая, что дракончик с этой скоростью летит ровно половину времени, получим ответ:

$$\langle v \rangle = \frac{v_0}{2} = 5$$ м/с.

Критерии

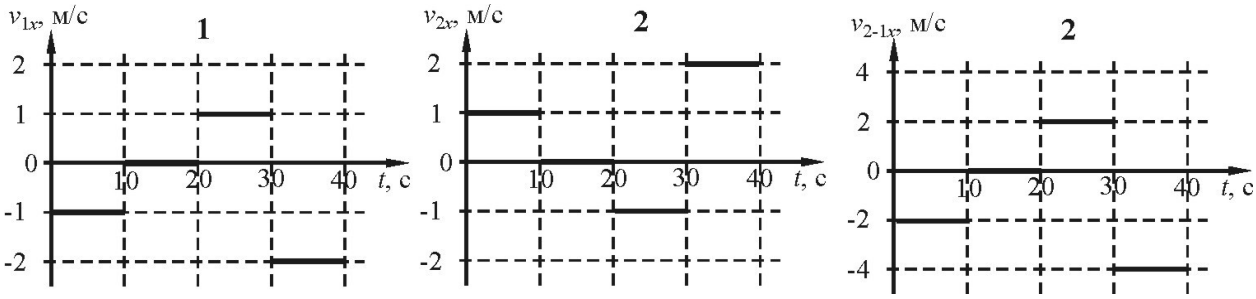
1. Указано, что при движении под углом 45° горизонтальная скорость равна вертикальной – 4 балла.
2. Указано, что средняя высота полета остается постоянной – 4 балла.
3. Указано, что средняя вертикальная скорость дракончика во время активного полета равна средней скорости во время отдыха – 4 балла.
4. Указано, средняя горизонтальная скорость дракончика во время полета равна средней скорости дракончика во время отдыха – 4 балла.
5. Найдено значение скорости – 4 балла.

2. Двое часовых, двигаясь прямолинейно, охраняют с противоположных сторон один небольшой объект. Графики зависимости координат часовых от времени даны на рисунке.



Постройте: 1) графики зависимости скорости v_x часовых от времени, 2) график зависимости скорости u_x первого часового относительно второго от времени.

Решение.

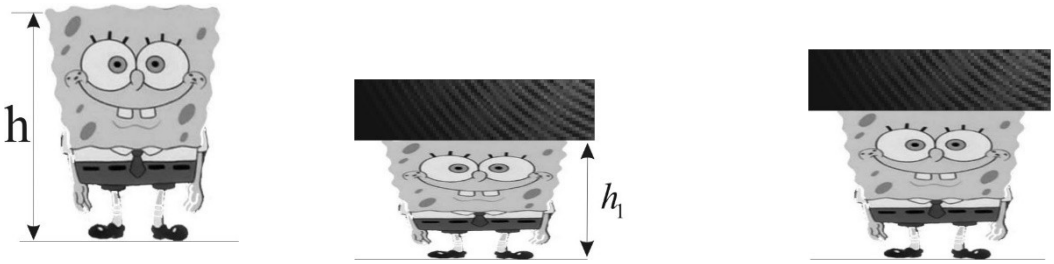


Критерии

1. Проведен анализ исходного графика $x(t)$ – 4 балла.
2. Пояснения к построению линий на графиках проекции скорости $v_{1x}(t)$, $v_{2x}(t)$ часовых относительно охраняемого объекта – 2 балла.
3. Построены графики $v_{1x}(t)$, $v_{2x}(t)$ – по 2 балла.
4. Пояснения к построению линий на графике зависимости проекции скорости от времени первого часового относительно второго $v_{1-2x}(t)$ – 6 балла.
5. Построен график $v_{1-2x}(t)$ – 4 балла.

3. Губка Боб Квадратные штаны отдыхал однажды на суше. Объем Губки $V = 0.02$ м^3, рост $h = 50$ см, средняя плотность сухого Боба $\rho = 100$ кг/м^3. Известно, что если объем воды в Губке Бобе превосходит его объем в данный момент времени, лишняя вода из него вытекает. Губку Боба замучила жажда, и он выпил три килограмма воды. Неожиданно на него сверху упал кирпич массы $m = 100$ кг. Губка Боб спружинил, так что при наибольшем сжатии его рост составлял $h_1 = 5$ см, горизонтальные размеры при этом его не менялись. Через некоторое время Губка Боб пришел в себя, и лежать под кирпичом ему даже понравилось. Найдите давление на землю, которое оказывал Губка Боб вместе с лежащим на нем кирпичом. Можно считать, что

Губка Боб имеет форму параллелепипеда с горизонтальными размерами a и b.



Решение.

Давление Боба будет складываться из веса кирпича mg, веса сухого Губки Боба $m'g$ и веса воды, оставшейся в нем $m_0 g$, деленных на S - площадь соприкосновения Губки с землей:

$$p = \frac{(m + m' + m_0)g}{S}$$

Несложно найти массу сухого Боба. Для этого умножим его плотность на объем:

$$m' = \rho V = 2 \text{ кг}$$

Найдем теперь S. Если горизонтальные размеры Губки a и b, то

$$V = a \cdot b \cdot h,$$

$$S = a \cdot b,$$

$$V = Sh,$$

Значит,

$$S = V / h = 0{,}04 \text{ м}^2.$$

Когда Губка Боб выпьет три литра воды, она в нем как-то распределится. Но в конечном состоянии воды не может быть больше Sh_1 - того объема губки, который получится при максимальном сжатии.

Эта величина равна

$$Sh_1 = 0{,}002 \text{ м}^3 = 2 \text{ литра}.$$

Значит, при падении кирпича из трех литров воды, которые выпил Боб, один литр вытечет, а останется только $m_0 = 2$ кг воды.

Итого, принимая постоянную $g = 10$ Н/м, получим

$$p = \frac{(m + m' + m_0)g}{S} = \frac{14 \cdot 10}{0.04} = 3500 \text{ Па}$$

Критерии

1. Найдена масса сухого Боба – 4 балла.
2. Найдена площадь Боба – 4 балла.
3. Найден объем и масса оставшейся в Губке воды – 6 балла.
4. Получено выражение и значение для давления – 6 балла.

4. Петя пользуется не совсем точной линейкой и весами. Результаты измерений могут быть как больше, так и меньше настоящих значений. Однако, Пете известно, что при измерениях линейкой результат отличается от настоящего не больше, чем на 5 миллиметров; ошибка измерения на весах – не более 100 грамм. Петя получил следующие результаты: длина кирпича 240 мм, ширина 140 мм, высота 60 мм, вес 3 кг. Петя интересуется плотностью кирпича. Какой может быть настоящая плотность кирпича (укажите минимально и максимально возможное значение)?

Решение.

Петя получит не фиксированный результат, а значения, лежащие в каком-то диапазоне, который и нужно оценить.

Плотность равна отношению массы к объему, и необходимо найти наибольшую и наименьшую возможные плотности. Наибольшая плотность будет тогда, когда масса наибольшая, а объем наименьший. Соответственно, наименьшая плотность будет при максимальном объеме и минимальной массе.

Обозначим длину, ширину и высоту кирпича, измеренный Петей $a = 24$ см, $b = 14$ см и $c = 6$ см, соответственно. Если $\Delta l = 0,5$ см – погрешность измерения, то настоящий объем кирпича лежит в промежутке

$$V_{\min} = (a - \Delta l)(b - \Delta l)(c - \Delta l) = 1744,875 \text{ см}^3,$$

$$V_{\max} = (a + \Delta l)(b + \Delta l)(c + \Delta l) = 2309,125 \text{ см}^3.$$

Массу обозначим $m = 3000$ г, а погрешность измерения массы $\Delta m = 100$ г. Тогда интервал возможных значений масс

$$m_{\min} = m - \Delta m = 2900 \text{ г},$$

$$m_{\max} = m + \Delta m = 3100 \text{ г}.$$

Теперь несложно найти максимальную и минимальную плотности:

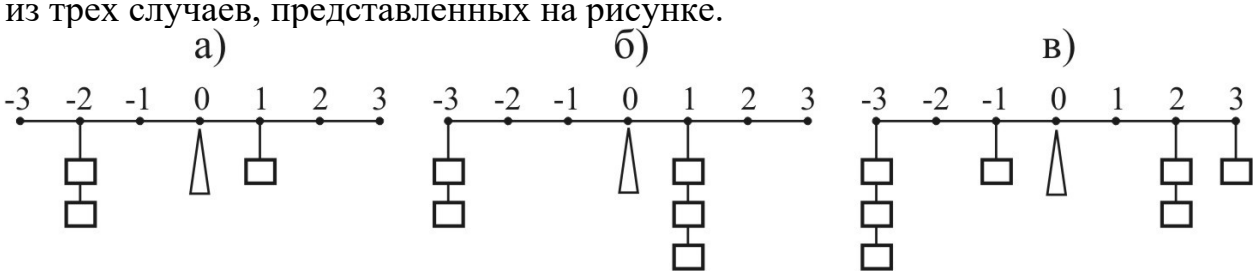
$$\rho_{\min} = \frac{m_{\min}}{V_{\max}} \approx 1,26 \text{ г/ см}^3,$$

$$\rho_{\max} = \frac{m_{\max}}{V_{\min}} \approx 1,78 \text{ г/ см}^3.$$

Критерии

1. Вывод о том, что наибольшая плотность будет тогда, когда масса наибольшая, а объем наименьший и наоборот – 4 балла.
2. Определен минимальный объем – 2 балла.
3. Определен максимальный объем – 2 балла.
4. Определена максимальная масса – 2 балла.
5. Определена минимальная масса – 2 балла.
6. Определена минимальная плотность – 4 балла.
7. Определена максимальная плотность – 4 балла.

5. На рисунке изображены рычаги, на которых имеются крючки, прикрепленные через одинаковые расстояния. Крючки пронумерованы от -3 до 3, причем 0 приходится на середину рычага. К некоторым крючкам прикреплено по нескольку грузов одинаковой массы. Имеется еще один такой же не подвешенный груз. К крючку с каким номером *n* его нужно подвесить, чтобы рычаг находился в равновесии? Решите задачу для каждого из трех случаев, представленных на рисунке.



Решение.

Обозначим через m массу одного груза, l – расстояние между соседними крючками. Применим для каждого случая правило рычага:

(а) $m \cdot l - 2m \cdot 2l + m \cdot nl = 0$, отсюда $n = 3$,

(б) $3m \cdot l - 2m \cdot 3l + m \cdot nl = 0$, отсюда $n = 3$,

(в) $2m \cdot 2l + m \cdot 3l - m \cdot l - 3m \cdot 3l + m \cdot nl = 0$, отсюда $n = 3$.

Критерии

1. Если получен правильный ответ без уравнения моментов сил – по 2 балла за каждый рычаг.

2. Записаны уравнения моментов сил и получено решение – по 6 баллов за случаи (а) и (б), 8 баллов – случай (в).