Олимпиада математика 2022-2023
Заочный тур

11 класс

1. Четырехугольник ABCD вписан в окружность с центром O и радиусом 2022. Точки E, F, G, H – центры окружностей, описанных около треугольников AOB, BOC, COD, DOA соответственно. Докажите, что в четырехугольник EFGH можно вписать окружность и найдите ее радиус.

2. Решить в натуральных числах уравнение $x! - y! = 114$.

3. Найдите значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} x^{2a} y^{a-2} = 2022, \\ x^{a+3} y^{a-3} = 2023, \end{cases}$$
не имеет положительных решений.

4. Многочлен $f(x) = x^3 + px + q$ имеет три целых корня. Найдите q, если $f(2023)$ простое число.